

EINE FUNKTIONALINTERPRETATION DER PRÄDIKATIVEN
ANALYSIS*

Von Wolfgang Maaß, München

In der klassischen Analysis treten imprädikative Definitionen auf: Man definiert spezielle Teilmengen der natürlichen Zahlen \mathbb{N} unter Bezugnahme auf die Gesamtheit aller Teilmengen von \mathbb{N} (z. B. $M := \{y \in \mathbb{N} \mid \forall X F(X, y)\}$). Dagegen darf man in einer prädikativen Analysis bei der Definition einer Menge nur auf solche Mengen Bezug nehmen, die man schon vorher in prädikativer Weise definiert hat. Man erhält nach Feferman [1] und Schütte [7], [8] ein adäquates System der prädikativen Analysis, wenn man an Stelle von Mengenvariablen X , die über alle Teilmengen von \mathbb{N} laufen, Mengenvariablen X^τ verwendet, die nur über Mengen einer Schicht $< \tau$ laufen. Dabei läßt man als Schichten nur solche Ordinalzahlen zu, die kleiner sind als die erste imprädikative Ordinalzahl κ_0 .

Wir geben in der vorliegenden Arbeit eine Funktionalinterpretation für dieses System der prädikativen Analysis an. Dabei gehen wir aus von der Funktionalinterpretation für die klassische Analysis nach Girard [2] und ordnen den Typen der Funktionale Schichten zu. Diese Schichtenzuordnung wird so vorgenommen, daß für die einer Formel A der prädikativen Analysis zugeordnete Aussage $A^* \equiv \exists x^u \forall y^v \mathfrak{A}[x^u, y^v]$ der Funktionalsprache gilt: Die Typen u und v haben dieselbe Schicht wie die Formel A . Die Verwendung von geschichteten Variablen α^τ, β^τ für Typen läßt sich dann folgendermaßen motivieren: Bei einer Formel $A(x)$ mit einer freien Zahlenvariablen x ist es klar, welchen Typ u die entsprechende Funktionalvariable x^u in der Formel $A(x)^*$ erhält: Sie erhält den Typ o , weil dies der Typ der natürlichen Zahlen ist. Bei einer Formel $A(X^\tau)$ mit einer geschichteten Mengenvariablen X^τ ist die Situation dagegen schwieriger: Man kann für X^τ in dieser Formel beliebige Prädikatenterme $V \equiv \{y \mid B(y)\}$ mit Formeln $B(y)$ einer Schicht $< \tau$ einsetzen. Ordnet man diesen Prädikatentermen V die Funktionale $V^* \equiv \lambda x_1^{w_1} \lambda x_2^{w_2} \lambda y^0 \mathfrak{B}[x_1^{w_1}, x_2^{w_2}, y^0]$ vom Typ $(w_1, w_2, o \rightarrow o)$ zu, falls $B(y)^* \equiv \exists x_1^{w_1} \forall x_2^{w_2} \mathfrak{B}[x_1^{w_1}, x_2^{w_2}, y^0]$ ist, so ist der Typ u der Funktionalvariablen x^u in $A(X^\tau)^*$, die der Variablen X^τ entspricht, so zu wählen, daß jedes dieser Funktionale V^* für x^u eingesetzt werden kann. Weil die genaue Struktur der Typen w_1, w_2 dabei von der Komplexität der Formel $B(y)$ abhängt, weiß man bei der gewählten Schichtenzuordnung lediglich, daß die Schichten von w_1, w_2 kleiner als τ sind. Daher wählt man $u : \equiv (\alpha^\tau, \beta^\tau, o \rightarrow o)$ mit Variablen α^τ, β^τ für

* Eingegangen am 1.12.1974.

beliebige Typen einer Schicht $< \tau$. Der Formel $\exists X^\tau A(X^\tau)$ entspricht dann in der Funktionalsprache die Aussage $\exists \alpha^\tau \beta^\tau \exists x^{(\alpha^\tau, \beta^\tau, o \rightarrow o)} (A(X^\tau))^*$. Um gesonderte Quantifikationen über Typen zu vermeiden, faßt man diese Quantoren zu einem einzigen Quantor $\exists x^{\vee \alpha^\tau \beta^\tau (\alpha^\tau, \beta^\tau, o \rightarrow o)}$ zusammen, wobei die Angabe eines Funktionals vom Typ $\vee \alpha^\tau \beta^\tau (\alpha^\tau, \beta^\tau, o \rightarrow o)$ gleichwertig sein soll mit der Angabe von Typen w_1, w_2 einer Schicht $< \tau$ und eines Funktionals vom Typ $(w_1, w_2, o \rightarrow o)$.

Wir geben zunächst in § 1 ein System G der prädikativen Analysis an. Da dies System zur vollen Ausschöpfung der Prädikativität Schlußregeln mit unendlich vielen Prämissen enthält, werden bei der Definition des Funktionalsystems \tilde{P} in § 2 unendlich lange Terme zugelassen. In § 3 wird die Normalisierbarkeit der Terme von \tilde{P} durch Transfinite Induktion bis κ_0 bewiesen. Das Church-Rosser-Theorem für \tilde{P} ist wegen dem Auftreten von unendlich langen Termen nicht trivial und wird in § 4 ebenfalls durch Transfinite Induktion bis κ_0 bewiesen. In § 5 wird eine konstruktive Variante P des Systems \tilde{P} angegeben, auf die sich die Beweise für \tilde{P} übertragen lassen. In § 6 wird dann eine intuitionistische Variante IG der prädikativen Analysis in dem System P interpretiert. Als Folgerungen erhält man für das System G und ein entsprechendes System der Δ_1^1 -Analysis die Widerspruchsfreiheit, eine Charakterisierung der beweisbar rekursiven Funktionen und die No-Counterexample-Interpretation. Viele der hier nur skizzierten Beweise sind in Maaß [4] ausführlicher dargestellt.

§ 1. Definition des Systems G der prädikativen Analysis

Wir legen eine primitiv rekursive Standard-Wohlordnung $<$ vom Ordnungstyp $\kappa_0 + 1$ auf \mathbb{N} zu Grunde. Die einer Ordinalzahl $\alpha \leq \kappa_0$ entsprechende natürliche Zahl bezeichnen wir mit $'\alpha'$, die durch eine natürliche Zahl n repräsentierte Ordinalzahl mit $|n|$. Man definiert in üblicher Weise (s. z. B. Kino [3]) für $\alpha \leq \kappa_0 + 1$ die Klasse der α -rekursiven Funktionen bezüglich dieser Wohlordnung $<$. Es sei jeder $(\kappa_0 + 1)$ -rekursiven Funktion f eine Nummer $'f'$ zugeordnet, aus der der Definitionsweg von f ersichtlich ist.

Es wird die folgende pr. rek. Kodierung für endliche Zahlenfolgen verwendet: $(m_1, \dots, m_n) \rightarrow \langle m_1, \dots, m_n \rangle := p_1^{m_1}, \dots, p_n^{m_n}$ (p_i sei die i -te Primzahl). Die Umkehrfunktionen erhält man durch $m = p_1^{k_1}, \dots, p_n^{k_n} \rightarrow k_i := (m)_i$ für $1 \leq i \leq n$.

Grundzeichen des Systems G :

- 1) Zahlenvariablen x_1, x_2, \dots .
- 2) Für jede Ordinalzahl $\sigma < \kappa_0$ 1-st. Prädikatenvariablen $X_1^\sigma, X_2^\sigma, \dots$.
- 3) Die 2-st. Prädikatskonstante $=$.
- 4) Funktionskonstanten für die pr. rek. Funktionen.
- 5) Die Zeichen $0, \wedge, \vee, \rightarrow, \exists, \forall, \{, |, \}, (,)$ und das Komma.

Terme:

- 1) $0, x_1, x_2, \dots$ sind Terme.

- 2) Sind t_1, \dots, t_n Terme und ist f eine n -st. Funktionskonstante, so ist auch $f(t_1, \dots, t_n)$ ein Term.

Formeln mit ihren Schichten:

- 1) Sind t_1, t_2 Terme, so ist $(t_1 = t_2)$ eine Formel der Schicht 0.
- 2) Ist t ein Term, so ist $(X^\sigma t)$ eine Formel der Schicht σ .
- 3) Sind A, B Formeln der Schicht σ bzw. τ , so sind $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ und $(A \rightarrow B)$ Formeln der Schicht $\max(\sigma, \tau)$.
- 4) Ist A Formel der Schicht σ , so sind auch $\exists x A$ und $\forall x A$ Formeln der Schicht σ .
- 5) Ist A Formel der Schicht σ , so sind $\exists X^\tau A$ und $\forall X^\tau A$ für $\tau > 0$ Formeln der Schicht $\max(\sigma, \tau)$.

Varietäten mit ihren Schichten:

Ist A eine Formel der Schicht σ , so ist $\{x|A\}$ eine Varietät der Schicht σ .

Bemerkungen:

- 1) S sei die Funktionskonstante für die Nachfolgerfunktion. Für Terme der Gestalt $S(S \dots (SO) \dots)$ mit n -maligem Auftreten von S schreiben wir \underline{n} .
- 2) $\neg A := (A \rightarrow (\underline{1} = \underline{0}))$.
- 3) Die Substitutionen $A_x[t]$ und $A_{X^\sigma}[\{x|B\}]$ werden so definiert, daß durch vorherige gebundene Umbenennung Variablenkollisionen vermieden werden. Dabei gehe die Formel $A_{X^\sigma}[\{x|B\}]$ aus A hervor, indem alle Formeln der Gestalt $(X^\sigma t)$ in A , bei denen X^σ in A frei auftritt, ersetzt werden durch $B_x[t]$.
- 4) Terme und Formeln ohne Variablen werden als numerische Terme bzw. Formeln bezeichnet.
- 5) Es sei in üblicher Weise jeder Formel A eine Gödelnummer $\ulcorner A \urcorner$ zugeordnet.

Axiome und Grundschlußregeln:

- (1) $A \rightarrow A$
- (2) $A \wedge B \rightarrow A$
- (3) $A \wedge B \rightarrow B$
- (4) $A \rightarrow A \vee B$
- (5) $B \rightarrow A \vee B$
- (6) $\underline{1} = \underline{0} \rightarrow A$
- (7) $C \rightarrow A, C \rightarrow B \vdash C \rightarrow A \wedge B$
- (8) $A \rightarrow C, B \rightarrow C \vdash A \vee B \rightarrow C$
- (9) $A \wedge B \rightarrow C \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$
- (10) $A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash A \wedge B \rightarrow C$
- (11) $B \vdash A \rightarrow B$
- (12) $A, A \rightarrow B \vdash B$
- (13) $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$
- (14) $A \vee \neg A$
- (15) $\forall x A \rightarrow A_x[t]$
- (16) $A_x[t] \rightarrow \exists x A$

- (17) $A \rightarrow B \vdash A \rightarrow \forall x B$ } falls x nicht frei in A auftritt
 (18) $B \rightarrow A \vdash \exists x B \rightarrow A$ }
 (19) A , falls A eine wahre numerische Formel ohne \forall ist
 (20) $A \vdash B$, falls B aus A hervorgeht mittels gebundener Umbenennung und Ersetzung numerischer Terme durch numerische Terme gleichen Werts
 (21) $A_x[n]$ für alle $n \in \mathbb{N} \vdash A$
 (22) $\forall X^\tau A \rightarrow A_{X^\tau}[\{x|B\}]$ } falls B eine Schicht $< \tau$ hat
 (23) $A_{X^\tau}[\{x|B\}] \rightarrow \exists X^\tau A$ }
 (24) $A \rightarrow B_{X_i^\sigma}[X_i^\sigma]$ für alle $\sigma < \tau \vdash A \rightarrow \forall X_i^\tau B$ } falls kein X_i^σ mit $\sigma < \tau$ in A oder
 (25) $B_{X_i^\tau}[X_i^\tau] \rightarrow A$ für alle $\sigma < \tau \vdash \exists X_i^\tau B \rightarrow A$ } B auftritt.

Herleitungen:

- 1) Wenn A ein Axiom nach (i) ist, und die Schicht von $A \leq \sigma < \kappa_0$ ist, so ist $\langle i, \ulcorner \alpha^1, \urcorner \sigma^1, \urcorner A^1 \rangle$ für alle $\alpha < \kappa_0$ eine Herleitung von A .
- 2) Sind $m_j \in \mathbb{N}$ Herleitungen von B_j für $j = 1, \dots, k$, sind $B_1, \dots, B_k \vdash A$ ein Grundschluß (i) und sind $|(m_1)_3|, \dots, |(m_k)_3|$ sowie die Schicht von $A \leq \sigma < \kappa_0$, so ist $\langle i, \ulcorner \alpha^1, \urcorner \sigma^1, \urcorner A^1, m_1, \dots, m_k \rangle$ eine Herleitung von A , falls $|(m_j)_2| < \alpha < \kappa_0$ ist für $j = 1, \dots, k$.
- 3) Ist für alle $j \in \mathbb{N}$ m_j eine Herleitung von $A_x[j]$ mit $|(m_j)_2| < \alpha < \kappa_0$ und ist f eine α -rekursive Funktion mit $f(j) = m_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$, so ist $\langle 21, \ulcorner \alpha^1, \urcorner \sigma^1, \urcorner A^1, \urcorner f^1 \rangle$ eine Herleitung von A . (Analog für die Grundschlüsse (24) und (25).)

Wir schreiben $G \stackrel{\alpha}{\vdash} A$, falls es eine Herleitung m von A gibt mit $(m)_2 = \ulcorner \alpha^1$ und $(m)_3 = \urcorner \sigma^1$.

Das durch Weglassen des Axioms (14) (tertium non datur) aus G entstehende System der intuitionistischen prädikativen Analysis wird mit IG bezeichnet. Mit Hilfe des Rekursionstheorems für pr. rek. Funktionen kann man eine pr. rek. Funktion definieren, die jeder Herleitung $\stackrel{\alpha}{\vdash} A$ in G eine Herleitung $\stackrel{\beta}{\vdash} A^1$ in IG mit $\beta < \omega(\alpha + 1)$ zuordnet (wobei A^1 durch eine $\neg\neg$ -Übersetzung aus A hervorgeht).

§ 2. Das Funktionssystem \tilde{P}

Typen mit ihren Schichten:

- 1) σ ist ein Typ der Schicht 0.
- 2) Die Typenvariablen $\alpha_i^\sigma, \beta_i^\sigma$ mit $i \in \mathbb{N}$ und $\sigma < \kappa_0$ sind Typen der Schicht σ .
- 3) Sind u, v Typen der Schicht σ bzw. τ , so sind $u \times v$ und $u \rightarrow v$ Typen der Schicht $\max(\sigma, \tau)$.
- 4) Ist u ein Typ der Schicht τ , so sind $\bigwedge \alpha_i^\sigma \beta_i^\sigma u$ und $\bigvee \alpha_i^\sigma \beta_i^\sigma u$ Typen der Schicht $\max(\tau, \sigma)$.

Die simultane Quantifikation nach 4) kürzen wir oft ab durch $\bigwedge \bar{\alpha}_i^\sigma u$ bzw. $\bigvee \bar{\alpha}_i^\sigma u$. Anstatt $(u_1 \rightarrow (\dots (u_n \rightarrow u) \dots))$ schreiben wir meist $u_1, \dots, u_n \rightarrow u$.

Der Rang Ru eines Typs u :

- 1) $R0 = 0$

- 2) $R\alpha_i^\tau = R\beta_i^\tau = \omega \cdot \tau$
- 3) $Ru \times v = Ru \rightarrow v = \max(Ru, Rv) + 1$
- 4) $R \wedge \bar{\alpha}^\tau u = R \vee \bar{\alpha}^\tau u = \max(\omega \cdot \tau, Ru + 1)$.

Bemerkung: Ist u ein Typ der Schicht σ , so gilt $Ru = \omega \cdot \sigma + m$ mit $m < \omega$. Sind $\bar{w} := w_1, w_2$ Typen einer Schicht $\tau' < \tau$, so gilt stets $R \wedge \bar{\alpha}^\tau u = R \vee \bar{\alpha}^\tau u > Ru_{\bar{\alpha}^\tau}[\bar{w}]$.

Terme von \bar{P} mit ihren Typen:

($r \vdash u$ steht für „ r ist ein Term vom Typ u “.)

- 1) Für alle Typen u und $i \in \mathbb{N}$ ist $0^u \vdash u$ und $x_i^u \vdash u$.
- 2) $S \vdash o \rightarrow o$.
- 3) $\otimes^{u_1, u_2} \vdash u_1, u_2 \rightarrow u_1 \times u_2$; $\Pi_j^{u_1, u_2} \vdash u_1 \times u_2 \rightarrow u_j$ für $j=1, 2$.
- 4) Für $u := v_{\bar{\alpha}^\tau}[\bar{w}] \rightarrow \vee \bar{\alpha}^\tau v$ mit Schicht von $w_1, w_2 = \sigma < \tau$ ist $E^u \vdash u$.
- 5) $r \vdash v \Rightarrow (\lambda x_j^u r) \vdash u \rightarrow v$. Dabei werden die in r freien Variablen x_j^u gebunden.
- 6) w_1, w_2 Typen einer Schicht $\sigma < \tau$, $r \vdash \wedge \bar{\alpha}^\tau v \Rightarrow r\{\bar{w}\} \vdash v_{\bar{\alpha}^\tau}[\bar{w}]$.
- 7) Sei $v_\gamma := v_{\bar{\alpha}_i^\tau}[\bar{\alpha}_i^\gamma]$ mit $\alpha_i^\gamma, \beta_i^\gamma$ nicht frei in v und $(\lambda x^{\nu_\gamma} r_\gamma) \vdash v_\gamma \rightarrow u$ für $\gamma < \tau$. Falls für alle $\gamma < \tau$ $\alpha_i^\gamma, \beta_i^\gamma$ nicht frei in u und nicht frei im Typ einer freien Variablen von $(\lambda x^{\nu_\gamma} r_\gamma)$ auftreten, ist $(\lambda x^{\nu_\gamma} r_\gamma)_{\gamma < \tau} \vdash \vee \bar{\alpha}_i^\tau v \rightarrow u$ (abgekürzt: $(\lambda x r_\gamma)_{\gamma < \tau}$). Dabei werden die jeweils in $(\lambda x^{\nu_\gamma} r_\gamma)$ freien Typenvariablen $\alpha_i^\gamma, \beta_i^\gamma$ gebunden.
- 8) Sei $r_\gamma \vdash v_{\bar{\alpha}_i^\tau}[\bar{\alpha}_i^\gamma]$ mit $\alpha_i^\gamma, \beta_i^\gamma$ nicht frei in v und nicht frei im Typ einer freien Variablen von r_γ für $\gamma < \tau$. Dann ist $(A r_\gamma)_{\gamma < \tau} \vdash \wedge \bar{\alpha}_i^\tau v$. Dabei werden die jeweils in r_γ freien Typenvariablen $\alpha_i^\gamma, \beta_i^\gamma$ gebunden.
- 9) Sei $r_i \vdash u$ für $i < \omega$. Dann ist $\langle r_i \rangle_{i < \omega} \vdash o \rightarrow u$.
- 10) Sei $r \vdash u \rightarrow v$ und $s \vdash u$. Dann ist $(rs) \vdash v$.

Mit Hilfe von gebundenen Umbenennungen zur Vermeidung von Bindungskollisionen definiert man Substitutionen $r|_{\bar{\alpha}_i^\tau}^{\bar{w}}$ bzw. $r_{x_i^u}[s^u]$, bei denen jeweils alle freien Auftreten von $\alpha_i^\tau, \beta_i^\tau$ bzw. x_i^u in r durch w_1, w_2 bzw. s^u ersetzt werden.

Zur bequemen Formulierung der Konversionsregeln zeichnen wir zunächst gewisse Nennformen als **i-Formen** aus ($i=1, \dots, 4$):

- 1) $(*s)$ ist für jeden Term s eine 1-Form.
- 2) $(\Pi_j *)$ ist für $j=1, 2$ eine 2-Form.
- 3) $((\lambda x r_\gamma)_{\gamma < \tau} *)$ ist für jeden Term $(\lambda x r_\gamma)_{\gamma < \tau}$ eine 3-Form.
- 4) $*\{\bar{w}\}$ ist für Typen $\bar{w} = w_1, w_2$ mit gleicher Schicht eine 4-Form.

Wir teilen eine i -Form durch \mathcal{F}_i oder \mathcal{F} mit. $\mathcal{F}[r]$ entsteht aus \mathcal{F} , indem $*$ durch r ersetzt wird.

Konversionsregeln

- (1) $(\lambda x r)s \equiv r_x[s]$
- (2) $\Pi_j((\otimes r_1)r_2) \equiv r_j$ für $j=1, 2$
- (3) $((\lambda x^{\nu_{\bar{\alpha}^\tau}} r_\gamma)_{\gamma < \tau} (E S^{\nu_{\bar{\alpha}^\tau}})) \equiv r_{\gamma_0}|_{\bar{\alpha}^{\gamma_0}}^{\bar{w}} x^{\nu_{\bar{\alpha}^\tau}}[S^{\nu_{\bar{\alpha}^\tau}}]$ wobei γ_0 die (gemeinsame) Schicht von w_1, w_2 ist. (Der rechts stehende Term wird oft abgekürzt durch $r_{\gamma_0}|_x[s]$.)

(4) $\underline{(Ar_\gamma)}_{\gamma < \tau} \{\bar{w}\} \models r_{\gamma_0} \overset{\bar{w}}{\models} \text{ wobei } \gamma_0 \text{ die (gemeinsame) Schicht von } w_1, w_2 \text{ ist}$

(5) $\langle r_i \rangle_{i < \omega \bar{n}} \models r_n$

(6) $\mathcal{F}_i[0] \models 0$ für $i=1, 2, 4$

(7) $\left((\lambda x^v \bar{x}^{\tau} [\bar{x}^{\tau}] r_\gamma)_{\gamma < \tau} 0 \right) \models r_0 \overset{o, o}{\models} x^v \bar{x}^{\tau} [o, o] [0]$

(8) $\mathcal{F}_i[\underline{(\lambda x r_\gamma)}_{\gamma < \tau} s] \models (\lambda x \mathcal{F}_i[r_\gamma])_{\gamma < \tau} s$

(9) $\mathcal{F}_i[\underline{\langle r_j \rangle}_{j < \omega} s^o] \models \langle \mathcal{F}_i[r_j] \rangle_{j < \omega} s^o$ } für $i=1, \dots, 4$

Reduktionsregeln:

1) $r \models r$

2) $r \models r'$ falls r nach einer der Konversionsregeln zu r' konvertiert

3) $r \models r', s \models s' \Rightarrow rs \models r's', \lambda x r \models \lambda x r'$ und $r\{\bar{w}\} \models r'\{\bar{w}\}$

4) $r_\gamma \models r'_\gamma$ für $\gamma < \tau \Rightarrow (\lambda x r_\gamma)_{\gamma < \tau} \models (\lambda x r'_\gamma)_{\gamma < \tau}$ und $(Ar_\gamma)_{\gamma < \tau} \models (Ar'_\gamma)_{\gamma < \tau}$

5) $r_i \models r'_i$ für $i < \omega \Rightarrow \langle r_i \rangle_{i < \omega} \models \langle r'_i \rangle_{i < \omega}$

6) $r \models s, s \models r' \Rightarrow r \models r'$.

Ein Term heißt **normal**, wenn er keine konvertierbaren Subterme enthält.

Ist u der Typ eines bei einer Konversionsregel doppelt unterstrichenen Terms, so nennen wir Ru den **Konversionsrang** der jeweiligen Konversion. Die Konversion (5) hat keinen Konversionsrang. Mit Kr bezeichnen wir die kleinste Ordinalzahl, die größer ist als die Konversionsränge der konvertierbaren Subterme des Terms r .

Definition der Länge $|r|$ eines Terms r :

1) $|r|=1$ für alle Variablen und Konstanten r

2) $|(rs)| = \max(|r|, |s|) + 1$

3) $|\lambda x r| = |r\{\bar{w}\}| = |r| + 1$

4) $|(\lambda x r_\gamma)_{\gamma < \tau}| = |(Ar_\gamma)_{\gamma < \tau}| = \sup_{\gamma < \tau} (|r_\gamma| + 1)$

5) $|\langle r_i \rangle_{i < \omega}| = \sup_{i < \omega} (|r_i| + 1).$

Bemerkung:

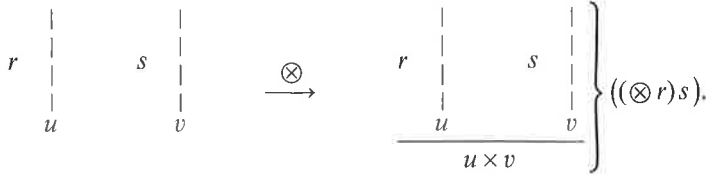
1) Wir lassen in dem System \tilde{P} nur Terme r mit $Kr, |r| < \kappa_0$ zu.

2) Es gilt: $|r|_{\bar{x}^\tau}^w = |r|, Kr|_{\bar{x}^\tau}^w = 0$ falls $Kr = 0$,

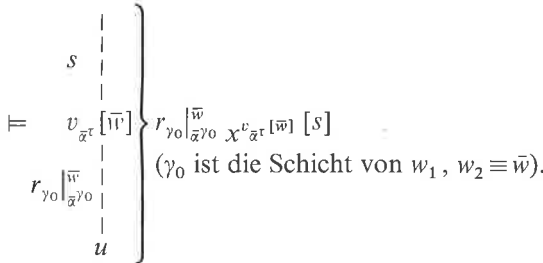
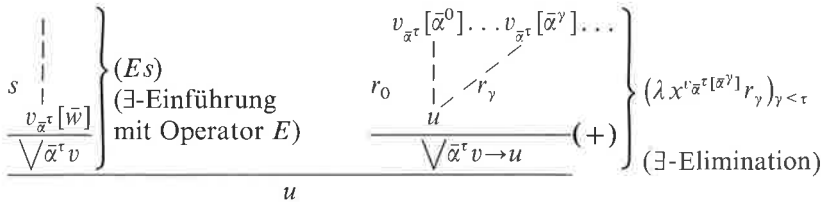
$|r_x[s^u]| \leq |s| + |r|, Kr_x[s^u] \leq \max(Kr, Ks, Ru + 1).$

Formulae-as-types Analogie:

Man kann die Typen von \tilde{P} auffassen als Formeln einer geschichteten Aussagenlogik 2. Stufe. Die meisten Terme kann man dann deuten als Herleitungen der ihrem Typ entsprechenden Formel in einem System des natürlichen Schließens für die intuitionistische Aussagenlogik 2. Stufe entsprechend Prawitz [6] (dabei werden dann auch die Bedingungen an die Typenvariablen bei der Termdefinition plausibel). Die Konstanten Π , \otimes , E entsprechen Operatoren auf Herleitungen, z. B.:



Die Konversionsregeln sind analog zu den Reduktionen zur Beseitigung von Maximumformeln beim natürlichen Schließen, wobei die Typen der in den Konversionsregeln doppelt unterstrichenen Terme die Rolle der Maximumformeln spielen. Z. B. läßt sich die Konversion (3) deuten als \exists -Reduktion mit der Maximumformel $\sqrt{\alpha^\tau} v$, wobei für eine typengerechte Termanwendung bei der \exists -Elimination ein Zwischenschritt (+) erforderlich ist:



Der Konversionsregel (8) entsprechende kommutative Reduktionen werden in Prawitz [6] zur Beseitigung von Maximumsegmenten benutzt.

§ 3. Normalisation der Terme von \tilde{P}

Induktive Definition der i -Gestalt für $i=2, 3, 4$:

- 1) $((\otimes r_1)r_2)$ und $0^{u_1 \times u_2}$ haben 2-Gestalt.

- 2) (Es) und $0^{\vee \bar{\alpha}^{\tau} u}$ haben 3-Gestalt.
- 3) $(Ar_{\gamma})_{\gamma < \tau}$ und $0^{\wedge \bar{\alpha}^{\tau} u}$ haben 4-Gestalt.
- 4) $((\lambda x r_{\gamma})_{\gamma < \tau, s})$ hat i -Gestalt für $i=2, 3, 4$.
- 5) Sei $j_0 \in \mathbb{N}$ und r_{j_0} habe i -Gestalt. Dann hat auch $(\langle r_j \rangle_{j < \omega, q})$ i -Gestalt ($i=2, 3, 4$).

Bemerkung: Die Terme r von i -Gestalt sind in mancher Hinsicht verwandt zu solchen Herleitungen im Kalkül des natürlichen Schließens, bei denen als letzter Schluß eine Einführungsregel steht. Ein Term $\mathcal{F}_i[r]$ ähnelt dann einer Herleitung, bei der auf diese Einführungsregel eine Eliminationsregel folgt.

Induktive Definition der i^* -Gestalt für $i=2, 4$:

- 1) $(\Pi_j r)$ hat 2^* -Gestalt.
- 2) $r\{\bar{w}\}$ hat 4^* -Gestalt.
- 3) r hat i^* -Gestalt $\Rightarrow (rs)$ hat i^* -Gestalt ($i=2, 4$).
- 4) r_j hat i^* -Gestalt für alle $j < \omega \Rightarrow (\langle r_j \rangle_{j < \omega, q})$ hat i^* -Gestalt ($i=2, 4$).

Lemma 1: Sei $i \in \{2, 4\}$ und $j \in \{2, 3, 4\}$. Dann gilt: r hat i^* -Gestalt $\Rightarrow r$ hat keine j -Gestalt.

Beweis: Induktion nach $|r|$.

Für einen Term $t \vdash u$ schreiben wir im folgenden oft Rt anstatt Ru . Wir definieren

$$f(t) := \begin{cases} \omega^{|r| \# |s|}, & \text{falls } t \equiv (rs) \\ \omega^{|t|}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{Dann ist } f(t) \geq \omega^{|t|}.$$

Lemma 2: Sei $t \equiv (rs)$ oder $t \equiv \{\bar{w}\}$ mit r, s normal. Dann gibt es zu t einen Term \tilde{t} mit $t \vdash \tilde{t}$, $|\tilde{t}| \leq f(t)$ und $K\tilde{t} \leq Rr$. Zusätzlich gilt:

- A) Falls $t \equiv (rs)$ ist und r i^* -Gestalt hat, ist \tilde{t} normal und \tilde{t} hat ebenfalls i^* -Gestalt ($i=2, 4$).
- B) Falls $t \equiv \mathcal{F}_i[p]$ ist ($i=2, 3, 4$) und p keine i -Gestalt hat, ist \tilde{t} normal und für $i \in \{2, 4\}$ hat \tilde{t} i^* -Gestalt.
- C) Falls $t \equiv \mathcal{F}_i[s]$ ist ($i=2, 3$), ist $K\tilde{t} \leq Rr$.
- D) Falls $t \equiv \langle r_i \rangle_{i < \omega, q}$ ist, ist \tilde{t} normal.

Beweis: Induktion nach $f(t)$.

Falls t nach einer der Konversionsregeln (1)–(7) konvertierbar ist, so führt man diese eine Konversion $t \vdash t'$ aus und definiert $\tilde{t} := t'$.

Sei nun $t \equiv \mathcal{F}_i[\langle r_j \rangle_{j < \omega, p}]$ ($i \in \{1, \dots, 4\}$) nach (9) konvertierbar. Dann ist $f(\mathcal{F}_i[r_j]) < f(t)$, es gilt also nach I.V.: $\mathcal{F}_i[r_j] \vdash \widetilde{\mathcal{F}_i[r_j]}$ und $\widetilde{\mathcal{F}_i[r_j]}$ hat die geforderten Eigenschaften. Es folgt $t \vdash \langle \mathcal{F}_i[r_j] \rangle_{j < \omega, p} \vdash \langle \widetilde{\mathcal{F}_i[r_j]} \rangle_{j < \omega, p} \equiv: \tilde{t}$.

zu A): Nur für $i=1$ und $r \equiv \langle r_j \rangle_{j < \omega} p$ ist möglich, daß $t \equiv (rs)$ ist und r 2*-Gestalt oder 4*-Gestalt hat. In diesem Fall hat jedes r_j 2*- bzw. 4*-Gestalt \Rightarrow (I.V.) jedes $\widetilde{\mathcal{F}}_i[r_j]$ hat 2*- bzw. 4*-Gestalt und ist normal $\Rightarrow \tilde{t}$ hat 2*- bzw. 4*-Gestalt und ist normal.

zu B): Falls $\langle r_j \rangle_{j < \omega} p$ keine i -Gestalt hat für $i=2, 3, 4$, so hat kein r_j i -Gestalt. I.V. $\Rightarrow \widetilde{\mathcal{F}}_i[r_j]$ ist normal und für $i=2, 4$ hat jedes $\widetilde{\mathcal{F}}_i[r_j]$ 2*-bzw. 4*-Gestalt $\Rightarrow \tilde{t}$ ist normal und für $i=2, 4$ hat \tilde{t} 2*- bzw. 4*-Gestalt.

zu C): Nach I.V. ist $K\widetilde{\mathcal{F}}_i[r_j] \leq Rr_j = R\langle r_j \rangle_{j < \omega} p$, also ist $K\tilde{t} \leq R\langle r_j \rangle_{j < \omega} p$. Falls $t \equiv \mathcal{F}_i[(\lambda x r_y)_{y < t} p]$ nach (8) konvertierbar ist, verfährt man analog. Die Eigenschaften A)–D) lassen sich bei jedem Fall trivial mitbeweisen.

Wir benutzen im folgenden die 2-st. Ordinalfunktion φ mit

- 1) $\varphi(0, \alpha) = \omega^\alpha$
- 2) $\varphi(\beta, \cdot)$ ist für $\beta \neq 0$ die Ordnungsfunktion der Menge $\{3 \mid \varphi(\eta, 3) = 3 \text{ für alle } \eta < \beta\}$.

Satz 1: Zu jedem Term t gibt es einen Term \tilde{t} mit $t \equiv \tilde{t}$, \tilde{t} normal und $|\tilde{t}| \leq g(t) := \varphi(Kt+1, |t|)$. Für Terme t mit $Rt \geq Kt$ gilt dabei zusätzlich:

- A) \tilde{t} hat i -Gestalt $\Rightarrow t$ hat i -Gestalt, $i=2, 3, 4$
- B) $t \equiv \mathcal{F}_i[r_1 \dots r_n, n \geq 0 \Rightarrow \tilde{t}$ hat i^* -Gestalt, $i=2, 4$.

Beweis: Induktion nach $g(t)$.

Wir bezeichnen die nach Lemma 2 gewonnenen Terme wieder mit $\tilde{t}, \tilde{r}, \dots$. Für $i=1, 2, 3$ bezeichnen wir den durch Weglassen des Nennzeichens $*$ in \mathcal{F}_i entstehenden Term manchmal ebenfalls mit \mathcal{F}_i .

- 1) $t \equiv \mathcal{F}_i[r], i=2, 3, 4$

Für $i=2, 3$ gilt nach I.V.: $t \equiv \widetilde{\mathcal{F}}_i[\bar{r}] \equiv \widetilde{\mathcal{F}}_i[\bar{r}] \equiv \hat{t}$; für $i=4$: $t \equiv \mathcal{F}_i[\bar{r}] \equiv \widetilde{\mathcal{F}}_i[\bar{r}] \equiv \hat{t}$. Dann ist nach I.V. und Lemma 2 $|\hat{t}| < g(t)$.

a) $Rr \geq Kt$: $\tilde{t} := \hat{t}$. $Kr \leq Kt \leq Rr \Rightarrow r$ hat keine i -Gestalt \Rightarrow (I.V. A) \bar{r} hat keine i -Gestalt \Rightarrow (Lemma 2 B)) \tilde{t} ist normal und für $i=2, 4$ hat \tilde{t} i^* -Gestalt; für $i=3$ hat t 2-, 3- und 4-Gestalt. Mit Lemma 1 folgen daraus A) und B).

b) $Rr < Kt$: Lemma 2 $\Rightarrow K\hat{t} \leq Rr < Kt \Rightarrow g(\hat{t}) = \varphi(K\hat{t}+1, |\hat{t}|) < \varphi(K\hat{t}+1, g(t)) = g(t) \Rightarrow$ (I.V.) $\hat{t} \equiv \tilde{t} := \tilde{t}$. Dabei ist $|\tilde{t}| \leq g(\hat{t}) < g(t)$.

zu A), B): Für $i=3$ hat t 2-, 3- und 4-Gestalt, für $i=2, 4$ ist $Rt < Rr < Kt$.

- 2) $t \equiv \mathcal{F}_i[r]r_1 \dots r_{n-1}r_n, n > 0, i=2, 4$

$s := \mathcal{F}_i[r]r_1 \dots r_{n-1}$. I.V. $\Rightarrow t \equiv \bar{s}\bar{r}_n \equiv \widetilde{\bar{s}\bar{r}_n} := \hat{t}$.

a) $Rs \geq Ks$: $\tilde{t} := \hat{t}$. I.V. $\Rightarrow \bar{s}$ hat i^* -Gestalt \Rightarrow (Lemma 2) \tilde{t} ist normal und hat i^* -Gestalt (\Rightarrow A), B)).

b) $Rs < Ks$: Lemma 2 $\Rightarrow K\hat{t} \leq Rs < Ks \leq Kt \Rightarrow$ (wie in 1) b)) $g(\hat{t}) < g(t)$. I.V. $\Rightarrow \hat{t} \equiv \tilde{t} := \tilde{t}$. Es ist $Rt < Rs < Ks \leq Kt \Rightarrow$ A), B).

- 3) $t \equiv \mathcal{F}_3[r]r_1 \dots r_{n-1}r_n, n > 0$

$s := \mathcal{F}_3[r]r_1 \dots r_{n-1}$. I. V. $\Rightarrow t \equiv \bar{s}\bar{r}_n = \widetilde{\bar{s}\bar{r}_n} \equiv \hat{t}$. Wegen Konversionsregel (8) ist

$R\mathcal{F}_3[r] < Kt \Rightarrow Rs < Kt$. Lemma 2 $\Rightarrow K\hat{t} \leq Rs < Kt \Rightarrow g(\hat{t}) < g(t) \Rightarrow$ (I.V.)
 $\hat{t} \models \hat{t} = : \bar{t}$. Es ist $Rt < Rs < Kt \Rightarrow$ A), B).

4) $t \equiv \langle s_j \rangle_{j < \omega} q r_1 \dots r_n$ oder $t \equiv (\lambda x r) r_1 \dots r_n, n > 0$
 Analog wie 3).

5) $t \equiv \langle r_j \rangle_{j < \omega}, (\lambda x r_\gamma)_{\gamma < \tau}, (A r_\gamma)_{\gamma < \tau}$
 $\bar{t} := \langle \bar{r}_j \rangle_{j < \omega}, (\lambda x \bar{r}_\gamma)_{\gamma < \tau}, (A \bar{r}_\gamma)_{\gamma < \tau}$.

6) $t \equiv \langle s_j \rangle_{j < \omega} q$

I.V. $\Rightarrow t \models \langle \bar{s}_j \rangle_{j < \omega} \bar{q} \models \widetilde{\langle \bar{s}_j \rangle_{j < \omega} \bar{q}} \equiv : \bar{t}$. Lemma 2 D) $\Rightarrow \bar{t}$ ist normal. Zu A): Falls \bar{t} i -Gestalt hat ($i \in \{2, 3, 4\}$) und $Rt \geq Kt$ ist, gibt es $j_0 \in \mathbb{N}$, so daß \bar{s}_{j_0} i -Gestalt hat, und es ist $R s_{j_0} = Rt \geq Kt \geq K s_{j_0} \Rightarrow$ (I.V.) s_{j_0} hat i -Gestalt $\Rightarrow t$ hat i -Gestalt.
 Die übrigen Fälle folgen trivial aus der I.V.

Definition: Terme von P , die keine freien Variablen für Typen oder Terme enthalten, bezeichnen wir als **Funktionale**.

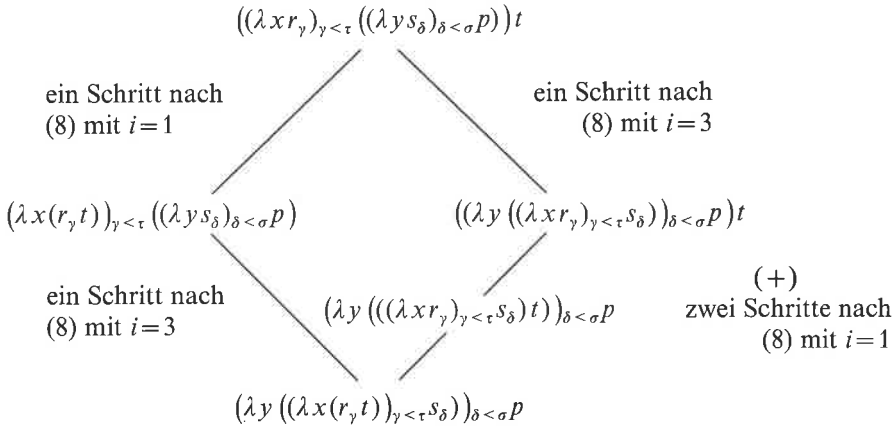
Lemma 3: Sei t ein normales Funktional vom Typ u . Dann gilt:

- a) $u \equiv 0 \Rightarrow t$ ist ein Term der Gestalt n mit $n \in \mathbb{N}$.
- b) $u \equiv u_1 \times u_2 \Rightarrow t \equiv (\otimes r) s$ oder $t \equiv 0$.
- c) $u \equiv \bigvee \bar{\alpha}^\tau v \Rightarrow t \equiv (Es)$ oder $t \equiv 0$.
- d) $u \equiv \bigwedge \bar{\alpha}^\tau v \Rightarrow t \equiv (A r_\gamma)_{\gamma < \tau}$ oder $t \equiv 0$.

Beweis: Induktion nach $|t|$.

§ 4. Church Rosser Theorem für das System \tilde{P}

Das Church Rosser Theorem für den Reduktionskalkül von \tilde{P} ohne die Konversionsregel (8) läßt sich nach der in Maaß [5] (für typenfreie λ -Kalküle mit unendlich langen Termen) angegebenen Methode beweisen. Es macht aber Schwierigkeiten, auch für die Konversionsregel (8) eine geeignete 1-Schritt Reduktion zu definieren; z. B. werden im folgenden Diagramm bei (+) zwei Schritte gebraucht:



Man sieht aber, daß an der Stelle (+) bei der zweiten Reduktion ein kürzerer Term konvertiert wird als bei der ersten. Wir benutzen diesen Hinweis und beweisen zunächst ein Church Rosser Theorem für einen Reduktionskalkül \triangleright , der nur kommutative Regeln enthält. Mittels der Regel [9] dieses Kalküls wird dabei der zweite Schritt bei (+) vom ersten Schritt „verschluckt“, weil beim ersten Schritt ein längerer Term konvertiert wird. Im vollen Reduktionskalkül \triangleright lassen wir dann eine beliebige Kette von Reduktionen nach \triangleright als 1-Schritt Reduktion zu. Die Church Rosser Theoreme für \triangleright und \triangleright werden ganz analog wie in Maaß [5] bewiesen, sodaß wir die Beweise hier nur skizzieren brauchen. Als „Reduktionsordnungen“ $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ lassen wir im folgenden nur Ordinalzahlen $< \kappa_0$ zu. Außerdem soll für die verwendeten Terme stets $|r|, \|r\| < \kappa_0$ gelten. Man kommt dann bei den Beweisen mit Induktionen bis κ_0 aus. Es sei dabei $\|r\|$ analog definiert wie $|r|$ in § 2 mit 2) ersetzt durch 2'): 2') $\|(rs)\| = \|r\| \# \|s\|$. $\|r\|$ hat gegenüber $|r|$ den Vorteil, daß $\|s\| \leq \|r\|$ ist, falls s durch kommutative Konversionen aus r hervorgeht. Es gilt stets: $|r| \leq \|r\| \leq \omega^{|r|}$. Anstatt $(\lambda x r_\gamma)_{\gamma < \tau}$ und $(A r_\gamma)_{\gamma < \tau}$ schreiben im folgenden oft nur $(\lambda x r_\gamma)$ bzw. $(A r_\gamma)$. Analog bei $\langle r_j \rangle_{j < \omega}$.

Der Reduktionskalkül $\triangleright_{\alpha, n}$ für die kommutativen Regeln

Wir schreiben \triangleright_α anstatt $\triangleright_{\alpha, 1} \cdot r \triangleright_{\alpha, n}^i r'$ soll bedeuten, daß $r \triangleright_{\alpha, n} r'$ zuletzt nach Regel [i] erschlossen wurde.

- [1] $r \triangleright_\alpha r$ für alle α
- [2] $\mathcal{F}_i [(\lambda x s_\gamma) r] \triangleright_{\|r\|} (\lambda x \mathcal{F}_i [s_\gamma]) r$
- [3] $\mathcal{F}_i [\langle s_j \rangle r] \triangleright_{\|r\|} \langle \mathcal{F}_i [s_j] \rangle r$ } für $i = 1, \dots, 4$
- [4] $r \triangleright_\alpha r' \Rightarrow r s \triangleright_\alpha r' s$

$$[5] \quad s \underset{\alpha}{\triangleright} s' \Rightarrow rs \underset{\alpha}{\triangleright} rs'$$

$$[6] \quad r \underset{\alpha}{\triangleright} r' \Rightarrow \lambda xr \underset{\alpha}{\triangleright} \lambda xr' \quad \text{und} \quad r\{\bar{w}\} \underset{\alpha}{\triangleright} r'\{\bar{w}\}$$

$$[7] \quad s_{\gamma} \underset{\alpha}{\triangleright} s'_{\gamma} \quad \text{für alle} \quad \gamma < \tau \Rightarrow (\lambda xs_{\gamma}) \underset{\alpha}{\triangleright} (\lambda xs'_{\gamma}) \quad \text{und} \quad (As_{\gamma}) \underset{\alpha}{\triangleright} (As'_{\gamma})$$

$$[8] \quad s_j \underset{\alpha}{\triangleright} s'_j \quad \text{für alle} \quad j \in \mathbb{N} \Rightarrow \langle s_j \rangle \underset{\alpha}{\triangleright} \langle s'_j \rangle$$

$$[9] \quad r \underset{\alpha}{\triangleright}^i s \quad \text{mit} \quad i \in \{1, \dots, 8\} \quad \text{und} \quad s \underset{\beta, n}{\triangleright} r' \quad \text{mit} \quad \beta < \alpha \Rightarrow r \underset{\alpha}{\triangleright} r'$$

$$[10] \quad r \underset{\alpha}{\triangleright} s \underset{\alpha, n}{\triangleright} r' \Rightarrow r \underset{\alpha, n+1}{\triangleright} r'$$

Bemerkungen:

1) Anstatt der Regel [9] könnte man bei den Regeln [1]–[8] jeweils eine anschließende Reduktion $\underset{\beta}{\triangleright}$ mit $\beta < \|r\|$ bzw. $\beta < \alpha$ zulassen.

2) Es gilt stets: $r \underset{\alpha, n}{\triangleright} r' \Rightarrow \|r'\| \leq \|r\|$.

3) Für $\beta < \alpha$ gilt: $r \underset{\beta, n}{\triangleright} r' \Rightarrow r \underset{\alpha}{\triangleright}^1 r \underset{\beta, n}{\triangleright} r' \Rightarrow r \underset{\alpha}{\triangleright}^9 r'$.

4) $r \underset{\alpha}{\triangleright}^i s \underset{\beta, n}{\triangleright} r'$ mit $i \in \{1, \dots, 9\}$ und $\beta < \alpha \Rightarrow r \underset{\alpha}{\triangleright} r'$; denn: $r \underset{\alpha}{\triangleright}^9 s \Rightarrow r \underset{\alpha}{\triangleright}^j t \underset{\gamma, 1}{\triangleright} s$ mit $j \in \{1, \dots, 8\}$ und $\gamma < \alpha \Rightarrow$ (mit 3)) $r \underset{\alpha}{\triangleright}^j t \underset{\delta, m}{\triangleright} r'$ mit $\delta := \max(\beta, \gamma)$ und $m \in \mathbb{N} \Rightarrow r \underset{\alpha}{\triangleright}^9 r'$.

Lemma 4: $r \underset{\alpha, n}{\triangleright} r_1$ und $r \underset{\beta, m}{\triangleright} r_2 \Rightarrow$ es gibt einen Term \hat{r} mit $r_1 \underset{\beta, m}{\triangleright} \hat{r}$ und $r_2 \underset{\alpha, n}{\triangleright} \hat{r}$.

Beweis: Induktion nach $\alpha \# \beta$.

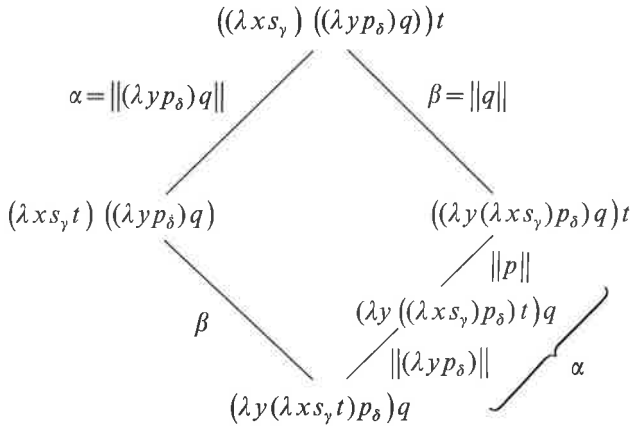
1) $n = m = 1$: Nebeninduktion nach $\|r\|$.

Zuerst wird die Behauptung für die Fälle $r \underset{\alpha}{\triangleright}^j r_1$, $r \underset{\beta}{\triangleright}^k r_2$ mit $j, k \in \{1, \dots, 8\}$ bewiesen. Jeder dieser Fälle wird in kanonischer Weise behandelt, so daß zwei Beispiele genügen:

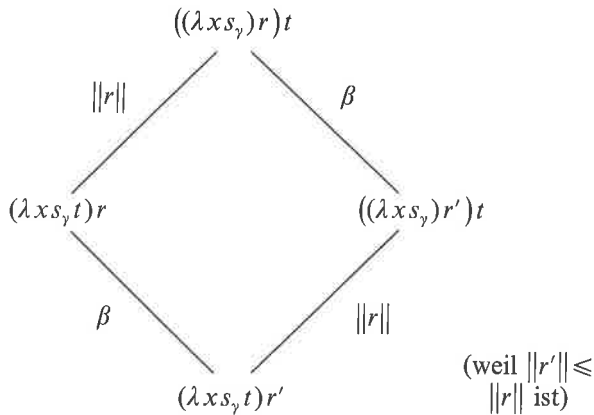
Sei $j=2, k=4$ und $\mathcal{F}_i \equiv (* t)$. Dann gilt

$$(\lambda x a_y) r \stackrel{l}{\underset{\beta}{\triangleright}} s \text{ mit } l \in \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}.$$

$l=2$:

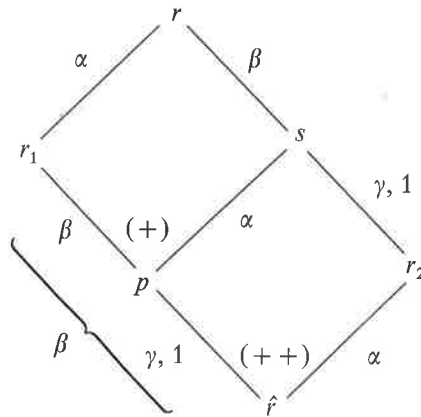


$l=5$:



Nachdem die Fälle $j, k < 9$ abgehandelt worden sind, können die restlichen Fälle bewiesen werden:

$j < 9, k = 9$: Es gilt also $r \triangleright_{\beta}^e s \triangleright_{\gamma, 1} r_2$ mit $e < 9$ und $\gamma < \beta$.



wobei (+) aus den vorherigen Fällen und (++) aus der I.V. folgt. Der Fall $j = k = 9$ ist analog.

2) $n \geq 1, m = 1$: Nebeninduktion nach n mit Hilfe von 1).

3) $n \geq 1, m \geq 1$: Nebeninduktion nach m mit Hilfe von 2).

Der volle Reduktionskalkül $\triangleright_{\alpha, n}$

Wir schreiben \triangleright anstatt \triangleright_{α} und $r \triangleright^i r'$, falls $r \triangleright r'$ zuletzt nach Regel (i) erschlossen wurde. Bei den folgenden Regeln sei stets $\alpha \geq 1$.

$$(1) r \triangleright_{\beta, n} r' \Rightarrow r \triangleright_0 r'$$

$$(2) r \triangleright_{\alpha} r \text{ für alle } \alpha \geq 1$$

$$(3) r \triangleright_{\alpha} r', s \triangleright_{\alpha} s' \Rightarrow (\lambda x r) s \triangleright_{\alpha} r'_x [s']$$

$$(4) r_i \triangleright_{\alpha} r'_i \text{ für } i = 1, 2 \Rightarrow \Pi_j ((\otimes r_1) r_2) \triangleright_{\alpha} r'_j, j = 1, 2$$

$$(5) (\lambda x r_{\gamma}) \triangleright_{\alpha} (\lambda x r'_{\gamma}), s \triangleright_{\alpha} s' \Rightarrow (\lambda x r_{\gamma}) (Es) \triangleright_{\alpha} r'_{\gamma_0 | x} [s']$$

$$(6) (Ar_{\gamma}) \triangleright_{\alpha} (Ar'_{\gamma}) \Rightarrow (Ar_{\gamma}) \{\bar{w}\} \triangleright_{\alpha} r'_{\gamma_0 |}$$

$$(7) \langle r_i \rangle \triangleright_{\alpha} \langle r'_i \rangle \Rightarrow \langle r_i \rangle \underline{n} \triangleright_{\alpha} r'_n$$

$$(8) 0 s \triangleright_{\alpha} 0 \text{ für alle } \alpha \geq 1$$

- (9) $\Pi_j 0 \triangleright_\alpha 0$ für alle $\alpha \geq 1$
- (10) $(\lambda x r_\gamma) \triangleright_\alpha (\lambda x r'_\gamma) \Rightarrow (\lambda x r_\gamma) 0 \triangleright_\alpha r'_0|_x[0]$
- (11) $0 \{\bar{w}\} \triangleright_\alpha 0$ für alle $\alpha \geq 1$
- (12) $r \triangleright_\alpha r', s \triangleright_\alpha s' \Rightarrow r s \triangleright_\alpha r' s'$
- (13) $r \triangleright_\alpha r' \Rightarrow \lambda x r \triangleright_\alpha \lambda x r'$ und $r \{\bar{w}\} \triangleright_\alpha r' \{\bar{w}\}$
- (14) $r_\gamma \triangleright_\alpha r'_\gamma$ für alle $\gamma < \tau \Rightarrow (\lambda x r_\gamma) \triangleright_\alpha (\lambda x r'_\gamma)$ und $(A r_\gamma) \triangleright_\alpha (A r'_\gamma)$
- (15) $r_i \triangleright_\alpha r'_i$ für alle $i \in \mathbb{N} \Rightarrow \langle r_i \rangle \triangleright_\alpha \langle r'_i \rangle$
- (16) $r \triangleright_\alpha^i s$ mit $i \in \{2, \dots, 15\}$ und $s \triangleright_{\beta, n} r'$ mit $0 \leq \beta < \alpha \Rightarrow r \triangleright_\alpha r'$
- (17) $r \triangleright_\alpha s \triangleright_{\alpha, n} r' \Rightarrow r \triangleright_{\alpha, n+1} r'$

Bemerkung: Wir lassen $r \triangleright r'$ nur dann zu, wenn es ein $\mu < \kappa_0$ gibt, so daß $r \triangleright_{\alpha, n} r'$ aus den Regeln [1]–[10], (1)–(17) erschlossen wurde, und dabei nur auf Terme t mit $|t| < \mu$ Bezug genommen wurde. Wir schreiben dann $r^\mu \triangleright_{\alpha, n} r'$ (analoge Schreibweise für \triangleright). Man verifiziert sofort:

$$r \triangleright_{\beta, n} r' \Rightarrow r^{\omega^{|\beta|+1}} \triangleright_{\beta, n} r'$$

Die allgemeine Formulierung der Reduktionsregeln von \triangleright ermöglicht es, das folgende Lemma zu beweisen:

Lemma 5: $p^\mu \triangleright_{\alpha, n} p'$ und $q^\mu \triangleright_\alpha q'$ mit $\alpha > 0 \Rightarrow p_x [q]^\mu \triangleright_{\alpha, n} p'_x [q']$.

Lemma 6: $p^\mu \triangleright_{\gamma, n} p_1$ und $p^\mu \triangleright_{\beta, m} p_2$ mit einer ε -Zahl $\mu \Rightarrow$ es gibt einen Term \hat{p} mit $p_1^\mu \triangleright_{\beta, m} \hat{p}$ und $p_2^\mu \triangleright_0 \hat{p}$.

Beweis: Induktion nach β . Für $\beta=0$ wird das Lemma 4 benutzt.

Satz 2 (Church Rosser Theorem):

$p^\mu \triangleright_{\alpha, n} p_1$ und $p^\mu \triangleright_{\beta, m} p_2 \Rightarrow$ es gibt einen Term \hat{p} und ein $\varrho < \varphi (\omega \cdot (\alpha \# \beta) + n + m, \mu + |p| + 1)$ mit $p_1^\varrho \triangleright_{\beta, m} \hat{p}$ und $p_2^\varrho \triangleright_{\alpha, n} \hat{p}$.

Beweis: Induktion nach $\alpha \# \beta$. Es sind Fallunterscheidungen analog wie im Beweis von Lemma 4 zu machen, wobei jeder Fall in kanonischer Weise behandelt wird.

§ 5. Definition des Systems P der prädikativen Funktionale

Das System \tilde{P} ist unkonstruktiv. Es enthält als Terme vom Typ $o \rightarrow o$ beliebige (mit Hilfe von Termen $\langle r_i \rangle_{i < \omega}$ definierbare) nichtrekursive Funktionen. Außerdem kann man $|r|$ und Kr für unendlich lange Terme r nicht berechnen. Man definiert daher analog zum Begriff der Herleitung für das System G in § 1 eine arithmetisierte Version P des Systems \tilde{P} , bei der jeder Term r durch eine natürliche Zahl $\ulcorner r \urcorner$ kodiert wird. Bei der Bildung eines Terms $\langle r_i \rangle_{i < \omega}$, $(\lambda x r_\gamma)_{\gamma < \tau}$ oder $(Ar_\gamma)_{\gamma < \tau}$ wird dabei die Nummer einer κ_0 -rekursiven Funktion kodiert, die die Komponenten aufzählt. Außerdem kodiert man bei diesen Termen Ordinalzahlen $< \kappa_0$, durch die $|s|$ und Ks für die Teilterme s abgeschätzt werden. Dabei ist es zweckmäßig, z. B. in $\langle r_i \rangle_{i < \omega}$ nicht genau $\sup_{i < \omega} (|r_i| + 1)$ zu kodieren, sondern auch größere Ordinalzahlen $\alpha < \kappa_0$ als Längenabschätzung zuzulassen. (Analog bei K).

Man muß dann bei der Normalisation zeigen, daß zu einem Term t aus P nicht nur eine Normalform \bar{t} aus \tilde{P} , sondern sogar aus P gefunden werden kann. Z. B. muß sichergestellt werden, daß für $t \equiv \langle r_i \rangle_{i < \omega}$ der entsprechende normale Term $\bar{t} \equiv \langle \bar{r}_i \rangle_{i < \omega}$ wieder durch eine κ_0 -rekursive Funktion beschrieben werden kann. Dazu definiert man (s. Maaß [4]) entsprechend dem Beweis von Satz 1 eine $(\kappa_0 + 1)$ -rekursive Funktion Ψ derart, daß für jeden Term t aus P eine Ordinalzahl $\alpha(t) < \kappa_0$ existiert, so daß $\Psi(\ulcorner t \urcorner) = \Psi_{< \alpha(t)}(\ulcorner t \urcorner) = \ulcorner \bar{t} \urcorner$ eine Kodierung $\ulcorner \bar{t} \urcorner$ der entsprechenden Normalform angibt (dabei ist $\Psi_{< \alpha(t)}$ ein $\alpha(t)$ -rekursiver „Abschnitt“ der Funktion Ψ).

Um das Church Rosser Theorem von § 4 auf P anwenden zu können, läßt man im System P nur solche Reduktionen $r_\alpha^\mu \equiv s$ zu, denen eine analog wie in § 4 definierte Reduktionsordnung $\alpha < \kappa_0$ zugeordnet werden kann und bei der nur Terme mit einer durch ein $\mu < \kappa_0$ beschränkten Länge benutzt werden. Diese Reduktionen sind ausreichend zur Normalisation entsprechend Satz 1.

Lemma 7: t sei ein Funktional vom Typ o aus P und s_1, s_2 seien normale Terme aus P mit $t_\alpha^\mu \equiv s_1$ und $t_\beta^\gamma \equiv s_2$ ($\alpha, \beta, \mu, \gamma < \kappa_0$). Dann gilt $s_1 \equiv s_2$.

Beweis: Es folgt $t_\alpha^\mu \triangleright s_1$ und $t_\beta^\gamma \triangleright s_2$. Nach Satz 2 gibt es einen Term r aus \tilde{P} mit $s_1 \triangleright_\beta r$ und $s_2 \triangleright_\alpha r$. Als normale Funktionale vom Typ o haben s_1, s_2 nach Lemma 3 die Gestalt $s_1 \equiv \underline{n}_1, s_2 \equiv \underline{n}_2$ mit $n_i \in \mathbb{N}$. Daher ist $s_1 \equiv r \equiv s_2$.

Definition des Wertes Wt für ein Funktional $t \vdash o$ aus P : Wt wird definiert als die nach Satz 1 und Lemma 3 existierende und nach Lemma 7 eindeutig bestimmte Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $t_\alpha^\mu \equiv \underline{n}$ ($\alpha, \mu < \kappa_0$).

§ 6. Interpretation des Systems *IG* der intuitionistischen prädikativen Analysis im Funktionalsystem *P*

Die Funktionalinterpretation verläuft analog zu der von Girard [2] für die klassische Analysis.

Ein Term $t \vdash o$ aus *P* heißt gültig (geschrieben $\models t$) wenn gilt: Für jedes Funktional t^+ aus *P*, das aus t entsteht durch Einsetzung von geschlossenen Typen der Schicht σ für freie Typenvariablen der Schicht σ und durch typengerechte Einsetzung von Funktionalen aus *P* für freie Variablen, ist $Wt^+ = 0$.

Mit Hilfe von Termen der Gestalt $\langle r_i \rangle$ kann man zu jeder pr. rek. Funktion einen entsprechenden Term aus *P* definieren. Insbesondere definiert man ein Funktional *D* für die absolute Differenz und Funktionale $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow$, die den aussagenlogischen Junktoren entsprechen.

Ist \mathfrak{A} eine 2-st. Nennform derart, daß $\mathfrak{A}[x^u, y^v]$ ein Term vom Typ o ist, so bezeichnen wir den Ausdruck $\exists x^u \forall y^v \mathfrak{A}[x^u, y^v]$ als Allformel. Ausdrücke mit mehreren Quantoren $\exists \exists \dots \forall \forall \dots$ werden nach einem festgelegten Verfahren zu Allformeln kontrahiert. Eine Allformel $\exists x^u \forall y^v \mathfrak{A}[x^u, y^v]$ heißt gültig, wenn man einen Term t^u aus *P* angeben kann, in dem y^v nicht frei auftritt, so daß $\models \mathfrak{A}[t^u, y^v]$ erfüllt ist (Abk.: $\models \exists x^u \forall y^v \mathfrak{A}[x^u, y^v]$).

Es wird nun induktiv zu jeder Formel *C* von *IG* eine Allformel *C** definiert. Den Typ $(\alpha_i^\sigma, \beta_i^\sigma, o \rightarrow o)$ kürzen wir dabei mit σ_i ab.

<i>C</i>	<i>C</i>
1) $t_1 = t_2$	$\exists x^o \forall y^o ((D t_1) t_2)$ mit x^o, y^o nicht in t_1, t_2
2) $(X_i^\sigma t)$	$\exists x^{\alpha_i^\sigma} \forall y^{\beta_i^\sigma} (z_i^{\sigma_i} \hat{x}^{\alpha_i^\sigma} y^{\beta_i^\sigma} t)$

Für die Fälle 3)–5) seien $A^* \equiv \exists x^u \forall y^v \mathfrak{A}[x, y]$ und $B^* \equiv \exists \hat{x}^{\hat{u}} \forall \hat{y}^{\hat{v}} \mathfrak{B}[\hat{x}, \hat{y}]$ bereits definiert.

3) $A \wedge B$	$\exists x \hat{x} \forall y \hat{y} (\mathfrak{A}[x, y] \wedge \mathfrak{B}[\hat{x}, \hat{y}])$
4) $A \vee B$	$\exists z^o x \hat{x} \forall y \hat{y} ((z^o \wedge \mathfrak{A}[x, y]) \vee ((\neg z^o) \wedge \mathfrak{B}[\hat{x}, \hat{y}]))$
5) $A \rightarrow B$	$\exists \hat{x}^{u, \hat{v} \rightarrow v} \hat{y}^{u \rightarrow \hat{u}} \forall x^u \hat{y}^{\hat{v}} (\mathfrak{A}[x, (\hat{x} x) \hat{y}] \rightarrow \mathfrak{B}[\hat{y} x, \hat{y}])$

Für die Fälle 6)–9) sei $A^* \equiv \exists x^u \forall y^v \mathfrak{A}[x^u, y^v, z^w]$ mit $z^w \equiv x_k^o$ bzw. $z^w \equiv z_k^k$ bereits definiert.

6) $\exists x_k A$	$\exists \hat{x}^o x^u \forall y^v \mathfrak{A}[x, y, \hat{x}^o]$
7) $\forall x_k A$	$\exists \hat{x}^{o \rightarrow u} \forall x^o y^v \mathfrak{A}[\hat{x} x^o, y^v, x^o]$
8) $\exists X_k^r A$	$\exists \hat{x} \vee \hat{\alpha}_k^r (u \times v_k) \forall \hat{y} \wedge \hat{\alpha}_k^r (u \times v_k \rightarrow v)$
	$((\lambda x_k (u \times v_k) \hat{\alpha}_k^r [\hat{\alpha}_k^r]) \mathfrak{A} _{\hat{\alpha}_k^r}^{\hat{\alpha}_k^r} [II_1 x_k, \hat{y} \{ \hat{\alpha}_k^r \} x_k, II_2 x_k]_{\sigma < r} \hat{x})$

$$9) \quad \forall X_k^\tau A \quad \left| \quad \begin{array}{l} \exists \hat{x} \wedge \hat{a}_k^\tau(\tau_k \rightarrow u) \forall \hat{y} \vee \hat{a}_k^\tau(v \times \tau_k) \\ ((\lambda x_k^{(v \times \tau_k)} \hat{a}_k^\tau[\hat{a}_k^\tau] \mathfrak{A} |_{\hat{a}_k^\tau}^{\hat{a}_k^\tau} [\hat{x} \{ \hat{\alpha}_k^\sigma \} (\Pi_2 x_k), \Pi_1 x_k, \Pi_2 x_k]_{\sigma < \tau} \hat{y})) \end{array} \right.$$

Bemerkung: Sei $A^* \equiv \exists x^u \forall y^v \mathfrak{A}[x, y]$. Dann läßt sich durch Induktion nach der Länge von A zeigen, daß u, v und A die gleiche Schicht haben.

Lemma 8: Es sei $V \equiv \{x | C\}$ eine Varietät der Schicht σ mit $C^* \equiv \exists z_1^{w_1} \forall z_2^{w_2} \mathfrak{B}[z_1, z_2, x^0]$ und $V^* \equiv \lambda z_1^{w_1} z_2^{w_2} x^0 \mathfrak{B}[z_1, z_2, x^0]$. Ferner sei A eine Formel mit $A^* \equiv \exists x^u \forall y^v \mathfrak{A}[x, y, z_i^\tau]$ und $(A_{X_i^\tau}[V])^* \equiv \exists x^{\hat{u}} \forall y^{\hat{v}} \mathfrak{A}[x^{\hat{u}}, y^{\hat{v}}]$. Dann ist $\hat{u} \equiv u_{\hat{\alpha}_i}[\bar{w}]$, $\hat{v} \equiv v_{\hat{\alpha}_i}[\bar{w}]$ und es gilt $\models \exists x^{\hat{u}} \forall y^{\hat{v}} \mathfrak{A} |_{\hat{\alpha}_i}^{\bar{w}} [x^{\hat{u}}, y^{\hat{v}}, V^*] \Leftrightarrow \models \exists x^{\hat{u}} \forall y^{\hat{v}} \mathfrak{A} [x^{\hat{u}}, y^{\hat{v}}]$.

Beweis: Induktion nach der Länge von A . Z.B. gilt für $A \equiv (X_i^\tau t) : \exists x^{\hat{u}} \forall y^{\hat{v}} \mathfrak{A} |_{\hat{\alpha}_i}^{\bar{w}} [x^{\hat{u}}, y^{\hat{v}}, V^*] \equiv \exists x^{w_1} \forall y^{w_2} ((\lambda z_1^{w_1} z_2^{w_2} x^0 \mathfrak{B}[z_1, z_2, x^0]) x^{w_1} y^{w_2} t)$ und $(A_{X_i^\tau}[V])^* \equiv \exists z_1^{w_1} \forall z_2^{w_2} \mathfrak{B}[z_1, z_2, t]$.

Satz 3 (Interpretationssatz):

$IG |_{\beta}^{\alpha} C \Rightarrow \models C^*$. Dabei kann ein C^* erfüllender Term t mit $|t| < \omega^{\alpha+1}$ und $Kt \leq \omega \cdot (\beta + 1)$ definiert werden.

Beweis: Induktion nach α , Fallunterscheidung nach dem letzten Schluß in der Herleitung von C . Der Beweis verläuft ganz analog wie bei Girard. Bei Schlüssen mit unendlich vielen Prämissen werden die unendlich vielen Terme, die die *-Übersetzungen der Prämissen erfüllen, in einem Term zusammengefaßt, der dann die *-Übersetzung der Konklusion erfüllt.

Beispiel: (24) $A \rightarrow B_{X_i^\tau} [X_i^\sigma]$ für $\sigma < \tau \vdash A \rightarrow \forall X_i^\tau B$ mit X_i^σ nicht in A oder B für $\sigma < \tau$.

Sei $A^* \equiv \exists x^u \forall y^v \mathfrak{A}[x^u, y^v]$ und $B^* \equiv \exists \hat{x}^{\hat{u}} \forall \hat{y}^{\hat{v}} \mathfrak{B}[\hat{x}^{\hat{u}}, \hat{y}^{\hat{v}}, z_i^\tau]$. $(+\sigma) (A \rightarrow B_{X_i^\tau} [X_i^\sigma])^* \equiv \exists X^u, v_\sigma \rightarrow v Y^{u \rightarrow v_\sigma} \forall x^u y^{v_\sigma} (\mathfrak{A}[x, (Xx)y] \rightarrow \mathfrak{B} |_{\hat{\alpha}_i}^{\hat{\alpha}_i^\sigma} [Yx, y, z_i^\sigma])$ ist nach I.V. mit geeigneten Termen t_σ, s_σ erfüllbar (dabei sei $u_\sigma := \hat{u}_{\hat{\alpha}_i}[\hat{\alpha}_i^\sigma]$ und $v_\sigma := \hat{v}_{\hat{\alpha}_i}[\hat{\alpha}_i^\sigma]$). Es ist

$$(A \rightarrow \forall X_i^\tau B)^* \equiv \exists X^u, \hat{v}_{\hat{\alpha}_i}(\hat{v} \rightarrow \tau_i) \rightarrow v Y^{u \rightarrow \hat{v}_{\hat{\alpha}_i}(\hat{v} \rightarrow \tau_i)} \forall x^u y^{\hat{v}_{\hat{\alpha}_i}(\hat{v} \times \tau_i)} (\mathfrak{A}[x, (Xx)y] \rightarrow ((\lambda x_i^{v_\sigma} \times \sigma_i \mathfrak{B} |_{\hat{\alpha}_i}^{\hat{\alpha}_i^\sigma} [(Yx) \{ \hat{\alpha}_i^\sigma \} (\Pi_2 x_i), \Pi_1 x_i, \Pi_2 x_i]_{\sigma < \tau} y))$$

Die erfüllenden Terme t, s werden folgendermaßen definiert:

$$t := (\lambda x^u (\lambda x_i^{v_\sigma} \times \sigma_i ((t_\sigma z_i^{\sigma_i} [\Pi_2 x_i] x^u) \Pi_1 x_i))_{\sigma < \tau}$$

$$s := (\lambda x^u (A(\lambda z_i^{\sigma_i} (s_\sigma x^u)))_{\sigma < \tau}.$$

Nach Lemma 3 kann man sich darauf beschränken, in $(A \rightarrow \forall X_i^\tau B)^*$ für y Terme der Gestalt (Eq) oder 0 einzusetzen. Setzt man z. B. $(Eq^{(\hat{v} \times \tau_i)_{\hat{\alpha}_i}[\bar{w}]})$ mit $\bar{w} \equiv w_1, w_2$ von einer Schicht $\sigma_0 < \tau$ für y ein, so kann man die Gültigkeit dieser Allformel

mittels Reduktionen auf die Gültigkeit von $(+\sigma_0)$ zurückführen (dabei wird das Church Rosser Theorem benutzt).

Bemerkung: Die Zuordnung von erfüllenden Termen aus P zu Herleitungen in IG kann durch eine pr. rek. Funktion beschrieben werden.

Folgerung: Die Systeme G, IG sind konsistent (weil $(1=0)^*$ in P nicht gültig ist).

Satz 4: Die Klasse der in G beweisbar rekursiven Funktionen stimmt überein mit der Klasse der κ_0 -rekursiven Funktionen.

Beweis: Die κ_0 -rekursiven Funktionen sind beweisbar rekursiv in G (s. Kino [3]). Ist andererseits H eine pr. rek. Funktion und gilt $G \vdash \forall x \exists y (H(x, y) = 0)$, so liefert die Funktionalinterpretation der $\neg\neg$ -Übersetzung ein Funktional $s \vdash o \rightarrow o$ aus P , so daß $\models D((Hn)(sn))0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Man erhält dann durch $f(n) := W(sn)$ eine mittels der κ_0 -rekursiven Funktion $\Psi_{<\alpha(s)}$ definierte κ_0 -rekursive Funktion f , für die gilt $\forall n (H(n, f(n)) = 0)$.

Bemerkungen:

- 1) Jede κ_0 -rekursive Funktion f läßt sich durch ein Funktional $s_f \vdash o \rightarrow o$ aus P definieren, in dem alle unendlichen Terme durch pr. rek. Funktionen beschrieben werden (denn: f ist beweisbar rekursiv in G , wobei man sogar mit einer Herleitung auskommt, in der alle Schlüsse mit unendlich vielen Prämissen durch pr. rek. Funktionen beschrieben werden. Weil die $\neg\neg$ -Übersetzung und die Funktionalinterpretation pr. rek. sind, ist dann der erfüllende Term aus P von der gewünschten Form).
- 2) Man erhält aus der Funktionalinterpretation in üblicher Weise die No-Counterexample-Interpretation für die prädikative Analysis.
- 3) Ein analog wie G definiertes System der Δ_1^1 -Analysis kann in G interpretiert werden (s. Feferman [1]). Aus der angegebenen Funktionalinterpretation erhält man für dieses System ebenfalls die Widerspruchsfreiheit, eine Charakterisierung der beweisbar rekursiven Funktionen und die No-Counterexample-Interpretation (s. Maaß [4]).
- 4) Die Funktionalinterpretation kann auf Systeme der geschichteten Analysis mit höheren Schichten als κ_0 übertragen werden.

LITERATUR

- [1] Feferman, S.: Systems of predicative Analysis. J. Symb. Logic **29** (1964).
- [2] Girard, J. Y.: Une extension de l'interprétation de Gödel à l'analyse, et son application à l'élimination des coupures dans l'analyse et la théorie des types. Proc. 2nd Scand. Log. Symp. ed Fenstad (North Holland, Amsterdam).
- [3] Kino, A.: On provably recursive functions and ordinal recursive functions. J. Math. Soc. Japan **20** (1968).

- [4] Maaß, W.: Eine Funktionalinterpretation der prädikativen Analysis. Dissertation an der Universität München (1974).
- [5] Maaß, W.: Church Rosser Theorem für λ -Kalküle mit unendlich langen Termen. Erscheint in Proc. of the IS|LC Kiel 1974 (Springer lecture notes).
- [6] Prawitz, D.: Natural Deductions. Almqvist Wiksells, Stockholm 1965.
- [7] Schütte, K.: Predicative Well-Orderings. Proc. 8. Logic Coll. ed Crossley/Dummett 1963.
- [8] Schütte, K.: Eine Grenze für die Beweisbarkeit der Transfiniten Induktion in der verzweigten Typenlogik. Archiv f. Math. Logik u. Grundlagenforschung 7 (1965).